数理解析研究所講究録
第1720巻 2010年 28-36

指数調和写像を用いた調和写像の存在定理

東北大学 大学院理学研究科　大森 俊明 (Toshiaki Omori)
Graduate School of Science and Faculty of Science,
Tohoku University

§1 導入

本稿を通して, (M,g), (N,h) は, それぞれ m 次元, n 次元の, コンパクトで境界を持たない Riemann 多様体とする. C^∞ 級写像 $u:(M,g)\to(N,h)$ が調和写像であるとは, u が次で定義されるエネルギー汎函数 E の臨界点になっているときをいう:

$$\mathrm{E}(u):=\int_M |du|^2 d\mu_g.$$

ここで, $|du|$ は u の微分 $du:TM\to TN$ の Hilbert-Schmidt ノルムであり, また, $d\mu_g$ は (M,g) 上の体積要素である. u が調和写像である為には, u が Euler-Lagrange 方程式 (第一変分公式)

$$\tau(u):=\mathrm{div}_g(du)=0$$

の解となっていることが必要十分である. div_g は g に関する発散を表す.

本稿の目的は, Eells-Sampson [4] による, 非正曲率多様体への調和写像の存在定理に対する新しいアプローチを与えることである.

$\varepsilon>0$ として, 写像 $u:(M,g)\to(N,h)$ に対して

$$\mathbb{E}_\varepsilon(u):=\int_M \frac{e^{\varepsilon|du|^2}-1}{\varepsilon}d\mu_g$$

で定義されるエネルギー汎函数を考える. $\mathbb{E}_\varepsilon$ の臨界点を与える C^∞ 級写像 $u:(M,g)\to(N,h)$ を ε-指数調和写像と呼ぶ. 形式的に $\varepsilon\to0$ のとき $\mathbb{E}_\varepsilon\to\mathrm{E}$ であるから, ε-指数調和写像の列 $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は (M,g) から (N,h) への調和写像を近似していると期待出来る. そして実際に次が成り立つ.

定理 A. (M,g), (N,h) をコンパクトで境界を持たない Riemann 多様体とし, (N,h) の断面曲率が至る所で非正であると仮定する. このとき, $\mathbb{E}_\varepsilon$-エネルギーが一様に有界な (M,g) から (N,h) への ε-指数調和写像の列

$$\{u_\varepsilon:(M,g)\to(N,h)\ ;\ \varepsilon\text{-指数調和写像},\ \mathbb{E}_\varepsilon(u_\varepsilon)\le E_0\}_{\varepsilon>0}$$

に対して, 或る調和写像 $u:(M,g)\to(N,h)$ が存在して, 適当な部分列 $\{\varepsilon(k)\}_{k=1}^{\infty}\to 0$ $(k\to\infty)$ を選ぶことにより, $\{u_{\varepsilon(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ は u に一様収束する:

$$u_{\varepsilon(k)}\to u\ \ (k\to\infty)\quad \text{in } C^{\infty}(M,N).$$

次節で説明するように, 実は, 多様体 (M,g) および (N,h) に特別な微分幾何学的仮定を置くことなく, 与えられたホモトピー類の中に ε-指数調和写像 $(\varepsilon>0)$ は常に存在する. 従って定理 A は Eells-Sampson による, 非正曲率多様体への調和写像の存在定理を示唆している.

系 (Eells-Sampson [4]). (N,h) の断面曲率が非正ならば, 与えられたホモトピー類を代表する調和写像が常に存在する.

定理 A の (N,h) に対する曲率の仮定は外すことが出来ない. 実際, 2 次元トーラスから 2 次元球面への調和写像は, 位相的写像度 ±1 に対応するホモトピー類の中には存在しないことが知られている.

しかし, 定義域 M の次元が 2 の場合には, 列 $\{u_{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ に対する特異点集合は高々有限集合である.

定理 B. (M,g) をコンパクトで境界を持たない曲面とし (N,h) をコンパクトで境界を持たない Riemann 多様体とする. このとき, $\mathbb{E}_{\varepsilon}$-エネルギーが一様に有界な (M,g) から (N,h) への ε-指数調和写像の列

$$\{u_{\varepsilon}:(M,g)\to(N,h)\ ;\ \varepsilon\text{-指数調和写像},\ \mathbb{E}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon})\le E_0\}_{\varepsilon>0}$$

に対して, 或る調和写像 $u:(M,g)\to(N,h)$ と或る有限個の点 $\{p_1,\dots,p_l\}\subseteq M$ とが存在して, 適当な部分列 $\{\varepsilon(k)\}_{k=1}^{\infty}\to 0$ $(k\to\infty)$ を選ぶことにより, $\{u_{\varepsilon(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ は u に $\{p_1,\dots,p_l\}$ の外で一様収束する:

$$u_{\varepsilon(k)}\to u\ \ (k\to\infty)\quad \text{in } C^{\infty}_{\mathrm{loc}}(M\setminus\{p_1,\dots,p_l\},N).$$

§2 指数調和写像

定義. C^{∞} 級写像 $u:(M,g)\to(N,h)$ が指数調和写像であるとは, u が

$$\mathbb{E}(u):=\int_M e^{|du|^2}d\mu_g$$

で定義されるエネルギー汎函数の臨界点になっているときをいう.

指数調和写像 $u:(M,g)\to(N,h)$ に対する Euler-Lagrange 方程式は次で与えられる:

$$\mathrm{div}_g(e^{|du|^2}du)=e^{|du|^2}\left\{\tau(u)+\langle\nabla|du|^2,du\rangle\right\}=0. \tag{2.1}$$

ここで $\tau(u)=\mathrm{div}_g(du)$ は u のテンション場であり, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は g に関する内積を表す.

エネルギー汎函数 $\mathbb{E}$ を考える最大の理由は, 多様体 (M,g) および (N,h) に特別な仮定を置くことなく, 与えられたホモトピー類内の $\mathbb{E}$-最小点の存在が常に保証されていることである.

命題 (Eells-Lemaire [3]). 任意のホモトピー類 $\mathcal{H} \in [M, N]$ に対して, $\mathcal{H}$ における $\mathbb{E}$-最小点が存在し, それは必然的に, 任意の $0 < \alpha < 1$ に対して α-Hölder 連続である.

証明は非常に単純で, 次の不等式のみから従う:

$$\frac{1}{k!}\int_M |du|^{2k} d\mu_g \leq \int_M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}|du|^{2k} d\mu_g = \mathbb{E}(u).$$

実際, $\mathbb{E}$ に対する最小化列は, その $\mathbb{E}$-エネルギーが一様に有界であるという理由のみから, 任意の Sobolev 空間 $W^{1,2k}(M, N)$ における有界列となる. ただ, この証明だけからはその $\mathbb{E}$-最小点のそれ以上の正則性は分からず, それ自身が Euler-Lagrange 方程式 (2.1) を, 弱解の意味ですら満たすかどうかも直ちには分からない.

しかしながら, p-調和写像に対する結果を鑑みても分かるように, 汎函数の増大度が高ければ高いほど, その最小点は高い正則性を持つことが期待出来る. そして実際には, $\mathbb{E}$-最小点が C^∞ 級であることが, まず Duc-Eells [2] と Lieberman [5] によって $N = \mathbb{R}$ (つまり函数) の場合に証明され, その後, Naito [6] によって $N = \mathbb{R}^n$ (つまりベクトル値函数) の場合に証明された. そして, Duc [1] によって次の最も一般の形で $\mathbb{E}$-最小点の正則性が証明された:

定理 (Duc [1]). 任意のホモトピー類 $\mathcal{H} \in [M, N]$ に対して, $\mathcal{H}$ における $\mathbb{E}$-最小点が存在し, それは必然的に C^∞ 級である.

§3 先験的評価

本節では, 定理 A および定理 B の証明の鍵となる, 指数調和写像に対する次の勾配評価の証明について説明する.

補題 1. $B_r = B_r(x) \subseteq M$ で固定された点 $x \in M$ を中心とする, 半径 $r > 0$ の球を表す. 指数調和写像 $u : (M, g) \to (N, h)$ に対して次が成り立つ:

$$\sup_{B_{1/2}} |du|^2 \leq C_0 \int_{B_1} (e^{|du|^2} - 1)\, d\mu_g.$$

ここで $C_0 > 0$ は $m = \dim M$, (M, g) の Ricci 曲率 Ric^M, (N, h) の曲率テンソル R^N, $\mathbb{E}_1(u; B_1)$ および半径 1 の球 B_1 の体積 $\mathrm{Vol}_g(B_1)$ のみに依存する定数である. 更に, (N, h) の断面曲率が非正である場合は, 定数 C_0 は R^N に依存しないようにとることが出来る.

完全な証明は [7] に載っているので, ここではその一部 (しかし本質的な部分) の先験的評価のみを紹介する.

J. Nash による等長埋め込み $\iota : (N, h) \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ を用いることにより, 以下では写像 $u : M \to N$ とベクトル値函数 $\iota \circ u : M \to \iota(N) \subseteq \mathbb{R}^d$ とを同一視して考え, ベクトル値函数と考えるときは, その微分を $\nabla u = \nabla(\iota \circ u)$ と書くことにする.

指数調和写像に対するEuler-Lagrange方程式により, 試験函数 $\varphi \in C_0^\infty(B_r, \mathbb{R}^d)$ に対して

$$0 = \sum_{A=1}^{d} \int_{B_r} \nabla_i u^A \nabla^i \varphi^A e^{|\nabla u|^2} d\mu_g + \sum_{A=1}^{d} \int_{B_r} \nabla d\Pi^A(u)(\nabla^i u, \nabla_i u) \varphi^A e^{|\nabla u|^2} d\mu_g \tag{3.1}$$

が成り立つ. ここで $\Pi : U_\delta(N) \to N$ は, N の δ-管状近傍 $U_\delta(N) \subseteq \mathbb{R}^d$ から N への最短距離射影である. また, Einsteinの規約に従って, 和の記号 $\sum$ の後で同じ添字が上下で組になって現れるときは $\sum$ を省略することにする. [6] に倣って, (3.1) の試験函数として

$$\varphi^A = \nabla^k(\eta^2 \nabla_k u^A) \tag{3.2}$$

を選ぶ. ここで $\eta : B_r \to \mathbb{R}$ は切り離し函数であって

$$0 \le \eta \le 1, \quad \eta = 1 \text{ on } B_{r/2}, \quad \operatorname{supp} \eta \subseteq B_r, \quad |\nabla \eta| \le \frac{2}{r}$$

を満たすものである. まずRicciの恒等式により

$$\begin{aligned} \nabla^i \varphi^A &= \nabla^i \nabla^k(\eta^2 \nabla_k u^A) \\ &= \nabla^k \nabla^i (\eta^2 \nabla_k u^A) - g^{ij} g^{kl} R^{M\,s}_{\ \ jlk} (\eta^2 \nabla_s u^A) \end{aligned}$$

が成り立つことに注意しておく. ここで $R^{M\,l}_{\ \ ijk} \partial_l = \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k$ は (M, g) の曲率テンソルである. (3.2) を代入すると (3.1) は

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{A=1}^{d} \int_{B_r} (\nabla^k \nabla_i u^A + \nabla_i u^A \nabla^k |\nabla u|^2) \nabla^i (\eta^2 \nabla_k u^A) e^{|\nabla u|^2} d\mu_g \\ &\quad + \int_{B_r} \sum_{i,j=1}^{m} \left\langle du\left(\mathrm{Ric}^M(e_i, e_j) e_j\right), du(e_i) \right\rangle e^{|\nabla u|^2} \eta^2 d\mu_g \\ &\quad - \sum_{A=1}^{d} \int_{B_r} \nabla d\Pi^A(u)(\nabla^i u, \nabla_i u) \nabla^k (\eta^2 \nabla_k u^A) e^{|\nabla u|^2} d\mu_g \\ &= \sum_{A=1}^{d} \int_{B_r} (\nabla^k \nabla_i u^A + \nabla_i u^A \nabla^k |\nabla u|^2) \nabla^i \nabla_k u^A e^{|\nabla u|^2} \eta^2 d\mu_g \\ &\quad + 2 \sum_{A=1}^{d} \int_{B_r} (\nabla^k \nabla_i u^A + \nabla_i u^A \nabla^k |\nabla u|^2) \nabla_k u^A e^{|\nabla u|^2} \eta \nabla^i \eta \, d\mu_g \\ &\quad + \int_{B_r} \sum_{i,j=1}^{m} \left\langle du\left(\mathrm{Ric}^M(e_i, e_j) e_j\right), du(e_i) \right\rangle e^{|\nabla u|^2} \eta^2 d\mu_g \\ &\quad - \sum_{A=1}^{d} \int_{B_r} \nabla d\Pi^A(u)(\nabla^i u, \nabla_i u) \nabla^k (\eta^2 \nabla_k u^A) e^{|\nabla u|^2} d\mu_g \end{aligned}$$

となる. 但し $\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M,g) 上の局所正規直交枠である. $\nabla d\Pi(u)(\nabla^i u, \nabla_i u)$ は $u=\iota\circ u$ の g に関するラプラシアン $\Delta_g u$ の N に直交する成分であるから, 上式の最後の項は

$$-\int_{B_r} |\nabla d\Pi(u)(\nabla^i u, \nabla_i u)|^2 e^{|\nabla u|^2}\eta^2 d\mu_g$$

となる. また, Leibniz 則と Gauss の公式を用いることにより

$$\begin{aligned}
&|\nabla\nabla(\iota\circ u)|^2 - |\nabla d\Pi(u)(\nabla^i u, \nabla_i u)|^2 \\
&\quad = |\nabla du|^2 + \left\langle \nabla d\Pi(u)(\nabla^i u, \nabla^j u), \nabla d\Pi(u)(\nabla_i u, \nabla_j u)\right\rangle - |\nabla d\Pi(u)(\nabla^i u, \nabla_i u)|^2 \\
&\quad = |\nabla du|^2 - \sum_{i,j=1}^m \left\langle R^N\left(du(e_i), du(e_j)\right) du(e_j), du(e_i)\right\rangle
\end{aligned}$$

が成り立つ. これを代入することにより, 結局

$$\begin{aligned}
0 = &\int_{B_r} |\nabla du|^2 e^{|\nabla u|^2}\eta^2 d\mu_g + \frac{1}{2}\int_{B_r} \left|\nabla|\nabla u|^2\right|^2 e^{|\nabla u|^2}\eta^2 d\mu_g \\
&+ \int_{B_r} \left\{ \langle \nabla|\nabla u|^2, \nabla\eta\rangle + 2\sum_{A=1}^d \langle \nabla|\nabla u|^2, \nabla u^A\rangle\langle\nabla u^A, \nabla\eta\rangle \right\} e^{|\nabla u|^2}\eta\, d\mu_g \\
&+ \int_{B_r} \sum_{i,j=1}^m \left\langle du\left(\mathrm{Ric}^M(e_i, e_j)e_j\right), du(e_i)\right\rangle e^{|\nabla u|^2}\eta^2 d\mu_g \\
&- \int_{B_r} \sum_{i,j=1}^m \left\langle R^N\left(du(e_i), du(e_j)\right) du(e_j), du(e_i)\right\rangle e^{|\nabla u|^2}\eta^2 d\mu_g
\end{aligned}$$

が得られる. ここで任意の $\delta > 0$ と $x \geq 0$ に対する不等式 $xe^x \leq \delta^{-1}e^{(1+\delta)x}$ を用いることにより, 第 3, 4 および 5 番目の積分はそれぞれ

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r} \left\{ \langle \nabla|\nabla u|^2, \nabla\eta\rangle + 2\sum_{A=1}^d \langle \nabla|\nabla u|^2, \nabla u^A\rangle\langle\nabla u^A, \nabla\eta\rangle \right\} e^{|\nabla u|^2}\eta\, d\mu_g \\
&\qquad \leq C(m)\int_{B_r} \left|\nabla|\nabla u|^2\right|(1+|\nabla u|^2) e^{|\nabla u|^2}|\nabla\eta|\eta\, d\mu_g \\
&\qquad \leq \frac{C(m)}{\delta}\int_{B_r} \left|\nabla|\nabla u|^2\right| e^{(1+\delta)|\nabla u|^2}|\nabla\eta|\eta\, d\mu_g, \\
&\int_{B_r} \sum_{i,j=1}^m \left\langle du\left(\mathrm{Ric}^M(e_i, e_j)e_j\right), du(e_i)\right\rangle e^{|\nabla u|^2}\eta^2 d\mu_g \\
&\qquad \leq \|\mathrm{Ric}^M\|_{L^\infty}\int_{B_r} |\nabla u|^2 e^{|\nabla u|^2}\eta^2 d\mu_g \\
&\qquad \leq \frac{1}{\delta}\|\mathrm{Ric}^M\|_{L^\infty}\int_{B_r} e^{(1+\delta)|\nabla u|^2}\eta^2 d\mu_g,
\end{aligned}$$

$$\int_{B_r}\sum_{i,j=1}^{m}\left\langle R^N\left(du(e_i),du(e_j)\right)du(e_j),du(e_i)\right\rangle e^{|\nabla u|^2}\eta^2 d\mu_g$$
$$\leq \|R^N\|_{L^\infty}\int_{B_r}|\nabla u|^2 e^{|\nabla u|^2}\eta^2 d\mu_g$$
$$\leq \frac{1}{\delta}\|R^N\|_{L^\infty}\int_{B_r} e^{(1+\delta)|\nabla u|^2}\eta^2 d\mu_g$$

と評価され (但し, R^N に関する項は, (N,h) の断面曲率が非正の場合には 0 以下と評価することが出来る), 従って

$$\frac{1}{2}\int_{B_r}\left|\nabla|\nabla u|^2\right|^2 e^{|\nabla u|^2}\eta^2 d\mu_g$$
$$\leq C(m,\delta)\left(\int_{B_r}\left|\nabla|\nabla u|^2\right|^2 e^{|\nabla u|^2}\eta^2 d\mu_g\right)^{1/2}\left(\int_{B_r} e^{(1+2\delta)|\nabla u|^2}|\nabla\eta|^2 d\mu_g\right)^{1/2}$$
$$+\,C(\mathrm{Ric}^M,R^N,\delta)\int_{B_r} e^{(1+\delta)|\nabla u|^2}\eta^2 d\mu_g$$

が得られる. 右辺第 1 項の最初の積分は左辺に吸収でき,

$$\int_{B_r}\left|\nabla|\nabla u|^2\right|^2 e^{|\nabla u|^2}\eta^2 d\mu_g = 4\int_{B_r}\left|\nabla(e^{\frac{1}{2}|\nabla u|^2})\right|^2\eta^2 d\mu_g$$

であることから, Sobolev の埋め込みを用いることにより

$$\left(\int_{B_{r/2}} e^{\frac{m}{m-2}|\nabla u|^2}d\mu_g\right)^{\frac{m-2}{m}}\leq C_1\int_{B_r}\left|\nabla(e^{\frac{1}{2}|\nabla u|^2}\eta)\right|^2 d\mu_g\leq\frac{C_1C_2}{r^2}\int_{B_r} e^{(1+\delta)|\nabla u|^2}d\mu_g$$

が得られる. ここで $C_1>0$ は Sobolev 定数で (M,g) のみに依存する. 一方 $C_2>0$ は $m=\dim M$, Ric^M, R^N および $\delta>0$ にのみ依存する定数であるが, (N,h) の断面曲率に対する仮定を用いると, 定数 C_2 は R^N に依存しないことに注意する.

これが指数調和写像に対する先験的評価になっていることは, $\delta>0$ が幾らでも小さく, たとえば $1+\delta<\frac{m}{m-2}$ を満たすようにとることが出来ることから分かる.

以上が補題 1 の証明の核となる議論である. 補題 1 の実際の証明は,

$$\int_{B_{r/2}} e^{(1+\delta)|\nabla u|^2}d\mu_g\leq C\int_{B_r} e^{|\nabla u|^2}d\mu_g$$

の形の先験的評価を証明し, これといわゆる Moser の反復法を組み合わせ, 更に Bochner-Weitzenböck 型の不等式に最大値の原理を適用することにより証明される. 詳しい証明は [7] を参照されたい.

§4 定理Aおよび定理Bの証明

最後に定理Aおよび定理Bの証明を与える. 必要となるのは, 指数調和写像に対する勾配評価 (補題1) および以下に述べる補題2のみである.

注意. 定理Aおよび定理Bにおける u_ε が或る調和写像に C^∞-位相で収束することを証明する為には, u_ε の勾配に対する C^0-評価さえ得られれば十分であることに注意しておく. 実際, [1, Section 3] で述べられているように, 勾配の C^α-ノルム $\|\nabla u_\varepsilon\|_{C^\alpha}$ はエネルギーと $\|\nabla u_\varepsilon\|_{C^0}$ のみによって評価され, また, それ以上の階数の微分の評価は楕円型偏微分方程式の一般論から従うからである.

補題 2. 写像 $u : M \to N$ および $\varepsilon > 0$ に対して次は互いに同値である.

(1) $u : (M,g) \to (N,h)$ は ε-指数調和写像である;

(2) $u : (M,g) \to (N,h_\varepsilon)$ は1-指数調和写像である. 但し $h_\varepsilon := \varepsilon h$;

(3) $u : (M,g_\varepsilon) \to (N,h)$ は1-指数調和写像である. 但し $g_\varepsilon := \varepsilon^{-1} g$.

[**定理Aの証明**] 相似変換 $h_\varepsilon = \varepsilon h$ を考えることにより, 所与の u_ε は1-指数調和写像 $u_\varepsilon : (M,g) \to (N,h_\varepsilon)$ である (補題2). そこで補題1を適用すると

$$\sup_M |\nabla u_\varepsilon|^2_{h_\varepsilon} \le C_\varepsilon \int_M (e^{|\nabla u_\varepsilon|^2_{h_\varepsilon}} - 1)\, d\mu_g$$

が得られる. ここで $C_\varepsilon > 0$ は m, Ric^M, $\mathbb{E}_1^{h_\varepsilon}(u_\varepsilon)$ および $\mathrm{Vol}_g(B_1)$ に依存するが, (N,h) の断面曲率が非正であることに注意すると, $R^{(N,h_\varepsilon)}$ には依存しない定数である.

$|\nabla u_\varepsilon|^2_{h_\varepsilon} = \varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2_h$ であり, よって

$$\mathbb{E}_1^{h_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \int_M (e^{\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2_h} - 1)\, d\mu_g \le E_0$$

であることから, 或る定数 $C_0 > 0$ が存在して

$$\sup_M \varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2_h \le C_0 \int_M (e^{\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2_h} - 1)\, d\mu_g$$

が成り立つ. 従って両辺を ε で割ることで, $u_\varepsilon : (M,g) \to (N,h)$ に対する一様勾配評価

$$\sup_M |\nabla u_\varepsilon|^2_h \le C_0 \int_M \frac{e^{\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2_h} - 1}{\varepsilon} d\mu_g \le C_0 E_0$$

が得られる. 定理Aが示された. □

次に (N,h) の曲率に対する仮定を外す. その場合, 上の証明における定数 $C_\varepsilon > 0$ は $R^{(N,h_\varepsilon)} \nearrow \infty$ に依存してしまい何も得られない. そこで今度は h_ε の代わりに定義域の相似変換 $g_\varepsilon = \varepsilon^{-1}g$ を考える. すると補題1によって, 任意の $x \in M$ に対して

$$|\nabla u_\varepsilon(x)|^2_{g_\varepsilon} \leq \sup_{B^{g_\varepsilon}_{1/2}(x)} |\nabla u_\varepsilon|^2_{g_\varepsilon} \leq C_\varepsilon \int_{B^{g_\varepsilon}_1(x)} (e^{|\nabla u_\varepsilon|^2_{g_\varepsilon}} - 1)\, d\mu_{g_\varepsilon}$$

が得られる. ここで $C_\varepsilon > 0$ は

$$m = \dim M, \quad \mathrm{Ric}^{(M,g_\varepsilon)}, \quad R^{(N,h)}, \quad \mathbb{E}^{g_\varepsilon}_1(u_\varepsilon; B^{g_\varepsilon}_1(x)) \text{ および } \mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(B^{g_\varepsilon}_1(x))$$

のみに依存する定数である. 今度は曲率 $\mathrm{Ric}^{(M,g_\varepsilon)}$ は明らかに有界であるが, 一方で体積 $d\mu_{g_\varepsilon} = \varepsilon^{-m/2} d\mu_g$ が発散する. しかし, $|\nabla u_\varepsilon|^2_{g_\varepsilon} = \varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2_g$ および $B^{g_\varepsilon}_1(x) = B^g_{\sqrt{\varepsilon}}(x)$ に注意すれば

$$\mathbb{E}^{g_\varepsilon}_1(u_\varepsilon; B^{g_\varepsilon}_1(x)) = \int_{B^{g_\varepsilon}_1(x)} (e^{|\nabla u_\varepsilon|^2_{g_\varepsilon}} - 1)\, d\mu_{g_\varepsilon} = \int_{B^g_{\sqrt{\varepsilon}}(x)} \frac{e^{\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2_g} - 1}{\varepsilon^{m/2}} d\mu_g$$

は $m = \dim M = 2$ の場合には一様に有界である.

[**定理 B の証明**] $\dim M = 2$ の場合, 上の勾配評価は, 或る $C_0 > 0$ によって

$$\varepsilon |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \leq C_0 \int_{B_{\sqrt{\varepsilon}}(x)} \frac{e^{\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2} - 1}{\varepsilon} d\mu_g$$

となる. 特に $\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2$ は $\varepsilon \to 0$ のとき M 上で一様に有界である. $\mathbb{E}_\varepsilon$-エネルギーの一様有界性に注意すると, 更に, 或る有限集合の外では $\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2$ は, (部分列を選ぶことにより) 幾らでも小さくなる. 実際, 任意の $\delta_0 > 0$ を固定して

$$\mathcal{B}_\varepsilon := \left\{ x \in M \ ; \ \varepsilon |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \geq \delta_0 \right\}$$

と定める. $\mathcal{B}_\varepsilon \subseteq M$ はコンパクトであるから, 有限集合 $\{p_{\varepsilon;i}\}_{i \in I_\varepsilon} \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon$ であって

$$\mathcal{B}_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i \in I_\varepsilon} B_{5\sqrt{\varepsilon}}(p_{\varepsilon;i}), \quad B_{\sqrt{\varepsilon}}(p_{\varepsilon;i}) \cap B_{\sqrt{\varepsilon}}(p_{\varepsilon;j}) = \emptyset \ \ (i \neq j)$$

を満たすものが存在する. 各 $i \in I_\varepsilon$ に対して

$$\delta_0 \leq \varepsilon |\nabla u_\varepsilon(p_{\varepsilon;i})|^2 \leq C_0 \int_{B_{\sqrt{\varepsilon}}(p_{\varepsilon;i})} \frac{e^{\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2} - 1}{\varepsilon} d\mu_g$$

であるから, $i \in I_\varepsilon$ に関して和をとることで

$$\delta_0 \cdot {}^\# I_\varepsilon \leq C_0 \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{B_{\sqrt{\varepsilon}}(p_{\varepsilon;i})} \frac{e^{\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2} - 1}{\varepsilon} d\mu_g = C_0 \int_{\bigcup_{i \in I_\varepsilon} B_{\sqrt{\varepsilon}}(p_{\varepsilon;i})} \frac{e^{\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2} - 1}{\varepsilon} d\mu_g$$

が成り立つ ($^{\#}I_\varepsilon$ は I_ε の濃度を表す). 最後の式は ε に関して一様に C_0E_0 で押さえられるから, 結局 $^{\#}I_\varepsilon \le \delta_0^{-1}C_0E_0$ は ε に関して一様に有界である. 適当な部分列を選ぶことにより, $^{\#}I_\varepsilon \equiv k$ は ε に依らず一定であり, $p_{\varepsilon;i}$ は或る点 $p_i \in M$ に $\varepsilon \to 0$ のとき収束する $(1 \le i \le k)$ と仮定して構わない. このとき $\mathcal{B}_0 := \{p_i\}_{i=1}^k \subseteq M$ と置けば

$$\forall\, K \subseteq M \setminus \mathcal{B}_0 : \text{コンパクト集合} \quad \exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \text{s.t.} \quad \sup_K \varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 \le \delta_0 \quad (\forall\, \varepsilon < \varepsilon_0)$$

が成り立つことが分かる. いま, u_ε に対する方程式

$$\Delta_g u_\varepsilon + \varepsilon\langle \nabla |\nabla u_\varepsilon|^2, \nabla u_\varepsilon\rangle - \nabla d\Pi(u_\varepsilon)(\nabla^i u_\varepsilon, \nabla_i u_\varepsilon) = 0 \tag{4.1}$$

において, 第2項は $\mathcal{B}_0$ の外で

$$\varepsilon\langle \nabla |\nabla u_\varepsilon|^2, \nabla u_\varepsilon\rangle \le \varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 |\nabla\nabla u_\varepsilon| \le \delta_0 |\nabla\nabla u_\varepsilon|$$

であり, $\delta_0 > 0$ は幾らでも小さく選べるので, L^2-理論によりラプラシアンの項 $\Delta_g u_\varepsilon$ に吸収させることが出来る. すなわち $\mathcal{B}_0$ の外では (4.1) は通常の調和写像の方程式と同じように扱えることが分かる. よって Sacks-Uhlenbeck [8] によるよく知られた議論により, 或る調和写像 $u : (M, g) \to (N, h)$ と或る有限個の点 $\mathcal{B}_1 = \{q_1, \ldots, q_l\} \subseteq M \setminus \mathcal{B}_0$ とが存在して, 適当な部分列 $\{\varepsilon(k)\}_{k=1}^\infty \to 0$ $(k \to \infty)$ を選ぶことにより

$$u_{\varepsilon(k)} \to u \quad (k \to \infty) \quad \text{in } C^\infty_{\mathrm{loc}}(M \setminus (\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1), N)$$

なる収束が成り立つ. □

参考文献

[1] D. M. Duc, *Variational problems of certain functionals*, Internat. J. Math. **6** (1995), no. 4, 503–535.

[2] D. M. Duc and J. Eells, *Regularity of exponentially harmonic functions*, Internat. J. Math. **2** (1991), no. 4, 395–408.

[3] J. Eells and L. Lemaire, *Some properties of exponentially harmonic maps*, Partial differential equations, Part 1, 2 (Warsaw, 1990), Banach Center Publ., 27, Part 1, vol. 2, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1992, pp. 129–136.

[4] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.

[5] G. M. Lieberman, *On the regularity of the minimizer of a functional with exponential growth*, Comment. Math. Univ. Carolin. **33** (1992), no. 1, 45–49.

[6] H. Naito, *On a local Hölder continuity for a minimizer of the exponential energy functional*, Nagoya Math. J. **129** (1993), 97–113.

[7] T. Omori, *On Eells-Sampson's existence theorem for harmonic maps via exponentially harmonic maps*, to appear in Nagoya Math. J.

[8] J. Sacks and K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. of Math. (2) **113** (1981), no. 1, 1–24.